www. eletricatotal. com

Teorema de Transferencia Máxima de Potencia AC

by www. eletricatotal. com

En el Capítulo 7 estudiamos este teorema cuando sólo teníamos Resistencias en un circuito de CC. Ahora estudiémoslo en CA y cuando hay presencia de elementos reactivos en el circuito. Consideremos una impedancia en serie con una fuente de voltaje, de modo que es una impedancia compleja. Este forma, será del tipo:

$$Z_i = R_i \pm jX_i \tag{1}$$

La carga también será una impedancia compleja. Escribiremos como:

$$Z_L = R_L \pm X_L \tag{2}$$

Para calcular la potencia disipada en la carga, primero calcularemos la corriente eléctrica que circula por el circuito. Consulte el circuito que se muestra en la Figura 1 como referencia.

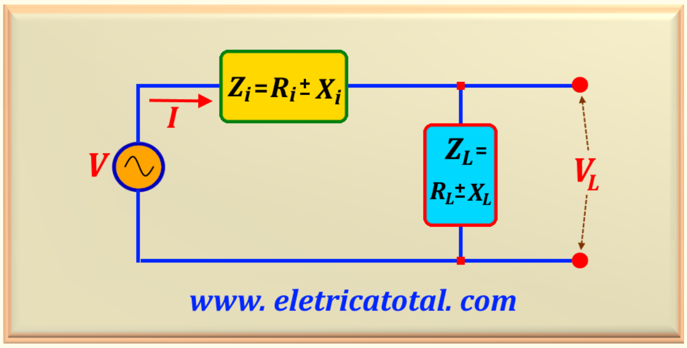

Figura 1: Circuito como referencia

Entonces, podemos escribir que:

$$I = \frac{V}{Z_i + Z_L} \tag{3}$$

Ahora que conocemos el valor de I, apliquemos la siguiente ecuación para calcular la potencia:

$$P = |Z_L|\ I^2 \tag{4}$$

Sustituyendo el valor de I encontrado en la ecuación (3) en (4), obtenemos:

$$P = |Z_L| \left(\frac{V}{Z_i + Z_L}\right)^2 \tag{5}$$

Podemos realizar una manipulación algebraica en la ecuación (5) y encontrar:

$$P = \frac{Z_L}{(Z_i + Z_L)^2}\ V^2 \tag{6}$$

Admitamos, basándonos en el circuito que se muestra en la Figura 1, que tenemos un fuente de voltaje y una impedancia compleja fija en una asociación en serie, que suministra energía a una carga. Consideremos la carga como **impedancia compleja variable**. De esta forma, podemos tener tres casos distintos. Analicemos cada caso por separado.

Caso 1 - Tenemos $R_L \neq 0$ e $X_L = 0$

Este es el caso donde la carga es **puramente resistiva**. Entonces vamos vuelve a calcular el valor de la corriente eléctrica reemplazando Z_L por R_L. Por lo tanto:

$$I = \frac{V}{Z_i + R_L} = \frac{V}{(R_i + R_L) + j\,X_i} \tag{7}$$

Pero para calcular la potencia necesitamos saber el valor absoluto de la corriente eléctrica. Entonces tenemos:

$$|\,I\,| = \frac{V}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}} \tag{8}$$

Entonces la potencia entregada a la carga R_L será:

$$P = |\,Z_L\,|\,I^2 = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2 + X_i^2}\,V^2 \tag{9}$$

Como queremos encontrar para qué valor de R_L obtendremos el máxima transferencia de potencia a la carga, debemos calcular la primera derivada de la ecuación anterior en relación con R_L e igualar su resultado en **cero**. Así:

$$\frac{dP}{dR_L} = V^2 \left\{ \frac{[\,(R_i + R_L)^2 + X_i^2\,] - 2\,R_L\,(R_i + R_L)}{[\,(R_i + R_L)^2 + X_i^2\,]^2} \right\} = 0 \tag{10}$$

Obviamente, para que esta expresión sea nula, debemos tener la numerador igual a **cero**. Trabajando el numerador algebraicamente encontramos la siguiente expresión:

$$R_i^2 + 2\,R_i\,R_L + R_L^2 + X_i^2 - 2\,R_i\,R_L - 2\,R_L^2 = 0 \tag{11}$$

Realizando las operaciones algebraicas necesarias para simplificar la expresión llegamos a:

$$R_i^2 + X_i^2 = R_L^2 \tag{12}$$

De esta manera llegamos a la forma final, es decir:

$$\boxed{R_L \;=\; \sqrt{R_i^2 \,+\, X_i^2} \;=\; |\,Z_i\,|} \tag{13}$$

Por lo tanto, concluimos que para lograr la máxima transferencia de potencia para una carga puramente resistiva, su valor debe ser igual al valor absoluto de la impedancia del circuito que conecta la carga a la fuente de voltaje.

Caso 2 - Tenemos $R_L \neq 0$ e $X_L \neq 0$

Este es el caso donde la carga tiene un elemento resistivo **fijo** y reactiva **variable**. Luego, calculando el valor de la corriente eléctrica. tenemos:

$$I \;=\; \frac{V}{Z_i \,+\, Z_L} \quad \text{ou} \quad |\,I\,| \;=\; \frac{V}{\sqrt{(R_i \,+\, R_L)^2 \,+\, (X_i \,+\, X_L)^2}} \tag{14}$$

Y el valor de la potencia viene dado por:

$$P \;=\; R_L \;\;|\,I\,|^2 \tag{15}$$

Sustituyendo la ecuación (14) en (15), obtenemos:

$$P \;=\; \frac{R_L}{(R_i \,+\, R_L)^2 \,+\, (X_i \,+\, X_L)^2}\;\; V^2 \tag{16}$$

Tenga en cuenta que en este caso, el valor de R_L es fijo. Entonces vamos deriva la ecuación (16) con respecto a X_L y consideraremos R_L constante. Entonces:

$$\frac{dP}{dX_L} = V^2 \left\{ \frac{-\,2\,R_L\,(X_i \;+\; X_L)}{[\,(R_i \;+\; R_L)^2 \;+\; (\,X_i \,+\, X_L\,)^2\,]^2} \right\} = \;0 \tag{17}$$

Como R_L y V tienen valores fijos, la única forma en que podemos cancelar esta derivada es si:

$$\boxed{X_L \; = \; -X_i} \tag{18}$$

En otras palabras, el valor de carga debe ser el **conjugado complejo** de la impedancia Z_i.

Caso 3 - Tenemos $R_L \neq 0$ e $X_L \neq 0$

Este es el caso donde la carga tiene un elemento resistivo **variable** y reactivo **fijo**. Si hacemos los cálculos para la corriente eléctrica y potencia encontraremos los mismos valores que en el caso 2. Por tanto:

$$P \; = \; \frac{R_L}{(R_i \, + \, R_L)^2 \, + \, (X_i \, + \, X_L)^2} \; V^2 \tag{19}$$

Tenga en cuenta que en este caso, el valor de X_L es fijo. Entonces vamos deriva la ecuación (19) con respecto a R_L y consideraremos X_L constante. Entonces:

$$\frac{dP}{dX_L} = V^2 \left\{ \frac{(R_i \, + \, R_L)^2 \, + \, (X_i \, + \, X_L)^2 \, - \, 2\, R_L \,(R_i \, + \, R_L)}{[\,(R_i \, + \, R_L)^2 \, + \, (\,X_i \, + \, X_L\,)^2\,]^2} \right\} = 0$$

Realizando operaciones de simplificación algebraica sobre el numerador, llegamos a:

$$R_L^2 \; = \; R_i^2 \, + \, (X_i \, + \, X_L)^2 \tag{20}$$

Ahora, extrayendo la raíz cuadrada de R_L encontramos la condición lo que estamos buscando, es decir:

$$\boxed{R_L \; = \; \sqrt{(R_i)^2 \, + \, (X_i \, + \, X_L)^2} \; = \; |\, Z_i \, + \, j\, X_L \,|} \tag{21}$$

De esta manera, concluimos que la transferencia máxima de potencia a la carga, cuando R_L es igual al valor absoluto de la impedancia del circuito.