Motor de Indução Monofásico
Cálculo da Impedância

by www.eletricatotal.com

Partindo do circuito equivalente de um motor de indução monofásico, conforme Figura 1, podemos calcular o paralelo do resistor e das reatâncias que aparecem no circuito.

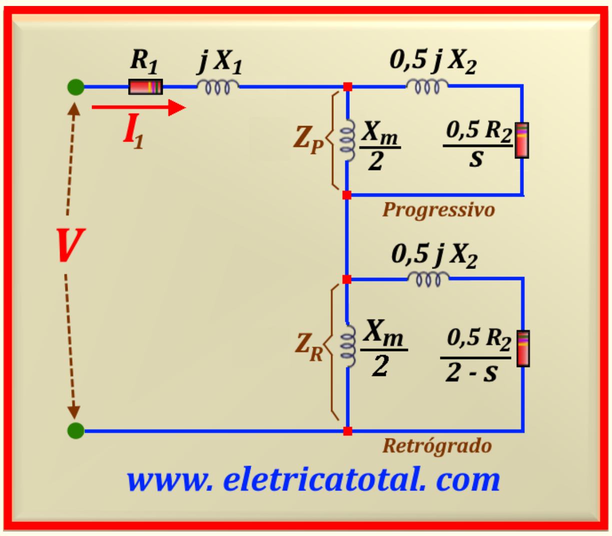

Figura 1: Circuito referência

Circuito Progressivo

Do circuito acima, facilmente verificamos que a impedância progressiva, que denominaremos por Z_P, é dada por:

$$Z_P \;=\; \frac{j\,\frac{X_m}{2}\,\left(j\frac{X_2}{2} \;+\; \frac{R_2}{2\,s}\right)}{\frac{R_2}{2\,s} + j\;\frac{(X_m + X_2)}{2}} \tag{1.1}$$

Efetuando as operações indicadas e, após um trabalho algébrico, chegamos a:

$$Z_P \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{-\,s\,X_m\,X_2 \;+\; j\,R_2\,X_m}{R_2 \;+\; j\,s\,(X_m \;+\; X_2)}\right] \tag{1.2}$$

Para eliminarmos o número complexo no denominador da equação, devemos multiplicar e dividir por seu complexo conjugado. Dessa forma, trabalhando algebricamente encontramos:

$$Z_P \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{s\,R_2\,X_m^2 \;+\; j\,[s^2\,X_m\,X_2\,(X_m \;+\; X_2) \;+\; R_2^2\,X_m]}{R_2^2 \;+\; s^2\,(X_m \;+\; X_2)^2}\right] \tag{1.3}$$

Por outro lado, pela definição da impedância progressiva podemos escrevê-la como uma parte real, representando a resistência progressiva e uma parte imaginária, representando a reatância progressiva. Assim, temos:

$$\boxed{R_P \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{s\,R_2\,X_m^2}{R_2^2 \;+\; s^2\,(X_m \;+\; X_2)^2}\right]} \qquad (1.4)$$

$$\boxed{X_P \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{s^2\,X_m\,X_2\,(X_m \;+\; X_2) \;+\; R_2^2\,X_m}{R_2^2 \;+\; s^2\,(X_m \;+\; X_2)^2}\right]} \qquad (1.5)$$

Estas equações representam os valores corretos de R_P e X_P. Mas, é claro, muitas literaturas optam por fazer algumas considerações com a finalidade de simplificar essas equações. Vamos ver o que é possível fazer. Em geral, temos $X_m >> X_2$. Tendo isso em mente, é possível escrever $X_m \,+\, X_2 \,\approx\, X_m$. Logo, é possível escrever as seguintes aproximações

$$R_P \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{s\,R_2\,X_m^2}{R_2^2\,+\,s^2\,X_m^2}\right] \;=\; \frac{R_2}{2\,s\left[\left(\frac{R_2}{s\,X_m}\right)^2\,+\,1\right]} \tag{1.6}$$

$$X_P \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{s^2\,X_m^2\,X_2\,+\,R_2^2\,X_m}{R_2^2\,+\,s^2\,X_m^2}\right] \tag{1.7}$$

Podemos verificar a validade das aproximações, usando como referência o exemplo 9-1, página 595, do livro Fundamentos de Máquinas Elétricas - Chapman - 5ª edição. Porém, cabe ressaltar que no livro o valor final de Z_P está com erro de impressão. Onde se lê

$$Z_P \;=\; 25,4\,+\,j\,30,7 \;=\; 39,90\angle 50,5^\circ$$

leia-se

$$\boxed{Z_P \;=\; 28,31\,+\,j\,31,17 \;=\; 42,11\angle 47,75^\circ}$$

Os dados fornecidos no problema são:

$$R_1 \;=\; 1,52\,\Omega \quad R_2 \;=\; 3,13\,\Omega \quad X_1 \;=\; 2,10\,\Omega$$

$$X_2 \;=\; 1,56\,\Omega \quad X_m \;=\; 58,2\,\Omega$$

Então, usando nossas equações aproximadas (1.6) e (1.7), substituindo pelos respectivos valores numéricos, encontramos:

$$R_P \;=\; 14,51\,\Omega \qquad X_P \;=\; 15,97\,\Omega$$

Para comparar os valores, devemos multiplicá-los por dois, haja vista que a metodologia usada no livro é diferente da metodologia que usamos no site. No entanto, os resultados finais são os mesmos, pois no livro, quando se calcula as potências o valor de R_P e X_P são divididos por dois.
Então, vamos dividir por dois os valores encontrados no livro, obtendo

$$R_P \;=\; 14,16\,\Omega \qquad X_P \;=\; 15,59\,\Omega$$

Observe que as diferenças estão nas casas decimais, comprovando que é perfeitamente possível usar as equações com aproximação.

Circuito Retrógrado

Para o circuito retrógrado e usando a Figura 1 como referência, o valor para Z_R é:

$$Z_R = \frac{j\,\frac{X_m}{2}\left(j\frac{X_2}{2} + \frac{R_2}{2\,(2-s)}\right)}{\frac{R_2}{2\,(2-s)} + j\,\frac{(X_m+X_2)}{2}} \tag{1.8}$$

Efetuando as operações na equação (1.8) e após realizar um trabalho algébrico, obtemos:

$$Z_R = \frac{1}{2}\left[\frac{-X_m\,X_2\,(2-s) + j\,R_2\,X_m}{R_2 + j\,(X_m + X_2)\,(2-s)}\right]$$

Multiplicando e dividindo a fração por seu complexo conjugado, eliminamos o termo imaginário no denominador. Dessa forma, obtemos:

$$Z_R = \frac{1}{2}\left[\frac{(2-s)\,R_2\,X_m^2 + j\,[(2-s)^2\,X_m\,X_2\,(X_m + X_2) + R_2^2\,X_m]}{R_2^2 + (2-s)^2\,(X_m + X_2)^2}\right]$$

E pela definição da impedância retrógrada podemos escrevê-la como uma parte real, representando a resistência retrógrada e uma parte imaginária, representando a reatância retrógrada. Então, obtemos:

$$\boxed{R_R = \frac{1}{2}\left[\frac{(2-s)\,R_2\,X_m^2}{R_2^2 + (2-s)^2\,(X_m + X_2)^2}\right]} \tag{1.9}$$

$$\boxed{X_R = \frac{1}{2}\left[\frac{[(2-s)^2\,X_m\,X_2\,(X_m + X_2) + R_2^2\,X_m]}{R_2^2 + (2-s)^2\,(X_m + X_2)^2}\right]} \tag{1.10}$$

Estas equações representam os valores corretos de R_R e X_R. Entretento, a simplificação de equações é uma prática comum na engenharia elétrica, especialmente quando lidamos com valores que são significativamente maiores ou menores em comparação com outros termos na equação. No caso da relação entre X_m e X_2 , se $X_m >> X_2$, é razoável simplificar a expressão $X_m + X_2 \approx X_m$, pois X_2 tem um impacto negligenciável no resultado final. Essa abordagem não só simplifica os cálculos, mas também ajuda a focar nos componentes que realmente afetam o comportamento do sistema. No entanto, é importante lembrar que essa simplificação só deve ser feita quando a diferença entre os valores é pequena o suficiente para justificar a aproximação sem comprometer a precisão necessária para a análise ou aplicação em questão. Então temos as seguintes aproximações:

$$R_R = \frac{1}{2}\left[\frac{(2-s)\,R_2\,X_m^2}{R_2^2 + (2-s)^2\,X_m^2}\right] \tag{1.11}$$

$$X_R = \frac{1}{2}\left[\frac{[(2-s)^2\,X_m^2\,X_2 + R_2^2\,X_m]}{R_2^2 + (2-s)^2\,X_m^2}\right] \tag{1.12}$$

Vamos usar estas equações e comparar com os resultados obtidos no livro do Chapman. Os valores do livro são

$$Z_R = 1,51 + j\,1,56 = 2,18\angle 45,9^\circ$$

Então, usando as equações aproximadas (1.11) e (1.12), substituindo pelos respectivos valores numéricos, encontramos:

$$\boxed{Z_R = 0,8 + j\,0,8 = 1,13\angle 45^\circ\,\Omega}$$

Portanto é perfeitamente possível usar as equações (1.11) e (1.12) para calcular os valores de R_R e X_R, pois dividindo os valores do livro por 2, os erros são negligenciáveis.

Desse modo, a pergunta que devemos responder é:

Qual a vantagem de usar as equações desenvolvidas no site?

A utilização de números reais em equações, em vez de números complexos, pode oferecer várias vantagens, especialmente em contextos educacionais ou em situações onde o acesso a calculadoras científicas é limitado. Trabalhar com números reais pode simplificar o processo de aprendizagem, tornando os conceitos mais acessíveis para os estudantes que estão começando a explorar a matemática avançada. Além disso, operações com números reais são mais intuitivas e podem ser realizadas em calculadoras básicas, o que é útil em ambientes onde recursos tecnológicos avançados não estão disponíveis. Mas, enquanto a simplificação para números reais pode ser conveniente, não substitui a necessidade de compreender e utilizar números complexos em contextos apropriados.