Cálculo B - 1ª Prova - 10/02/2021

Aluno - Claudir Dias Barbieri
Nº Matr. 50085

Respostas

1 Questão a

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx \tag{1a}$$

Solução:
Vamos fazer a seguinte substituição de variável

$$x = a\, tg\, u \quad \Rightarrow \quad dx = a\, sec^2\, u\ du \quad \text{e} \quad x^2 = a^2\, tg^2\, u$$

Substituindo em (1a) obtemos

$$I = \int \frac{a\, sec^2\, u}{\sqrt{a^2\,(1 + tg^2\, u)}}\, du = \int \frac{a\, sec^2\, u}{a\, sec\, u}\, du = \int sec\, u\ du$$

Vamos multiplicar e dividir a expressão por $\sec\, u + \tan\, u$, obtendo

$$I = \int \frac{\sec\, u\,(\sec\, u + \tan\, u)}{\sec\, u + \tan\, u}\, du = \int \frac{\sec^2\, u + \sec\, u\ \tan\, u}{\sec\, u + \tan\, u}\, du$$

Fazendo a integração por substituição e sendo $v = \sec\, u + \tan\, u$, então $dv = (\sec\, u\ \tan\, u + \sec^2\, u)\ du$. Assim

$$I = \int \sec\, u\ du = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$$

Retornando à variável u, obtemos

$$I \;=\; \int \sec u \; du \;=\; \ln |\sec u + \tan u| + C'$$

onde $C' \in \Re$ é a constante de integração.
Por outro lado, temos

$$tg\, u = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad tg^2\, u = \frac{x^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad tg^2\, u \,+\, 1 \,=\, sec^2\, u \,=\, \frac{x^2}{a^2} + 1$$

Daí, obtemos

$$sec\, u = \frac{\sqrt{x^2 \,+\, a^2}}{a}$$

Logo, obtemos a seguinte resposta

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \,+\, a^2}}\, dx \;=\; ln\left(\frac{\sqrt{x^2 \,+\, a^2} \,+\, x}{a}\right) \,+\, C'$$

Ou, alternativamente, podemos escrever

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \,+\, a^2}}\, dx \;=\; ln(\sqrt{x^2 \,+\, a^2} \,+\, x) \,-\, ln\, a \,+\, C'$$

Como C' é uma constante arbitrária e $ln(a)$ também é, então podemos juntá-los em uma única constante e reescrever como

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \,+\, a^2}}\, dx \;=\; ln(\sqrt{x^2 \,+\, a^2} \,+\, x) \,+\, C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

2 Questão b

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int \frac{1}{x\,\sqrt{x^2\,+\,a^2}}\,dx \tag{1b}$$

Solução:
Vamos fazer a seguinte substituição de variável

$$x = a\,tg\,u \quad \Rightarrow \quad dx = a\,sec^2\,u\,du \quad \text{e} \quad x^2 = a^2\,tg^2\,u$$

Substituindo em (1b) obtemos

$$I = \int \frac{a\,sec^2\,u}{a\,tg\,u\,\sqrt{a^2\,(1\,+\,tg^2\,u)}}\,du \;=\; \int \frac{a\,sec^2\,u}{a^2\,tg\,u\,sec\,u}\,du \;=\; \int \frac{cosec\,u}{a}\,du$$

Por outro lado, sabemos que

$$\int cosec\,u\;du = ln(cosec\,u - \;cotg\,u) + C'$$

Então, obtemos

$$I = \frac{1}{a}\,ln(cosec\,u - \;cotg\,u) + C' \tag{2b}$$

e sabemos que

$$cosec\,u = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} \qquad \text{e} \qquad cotg\,u = \frac{a}{x}$$

Então, substituindo em (2b) obtemos

$$I = \frac{1}{a}\,ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} - \frac{a}{x}\right) + C$$

$$I = \frac{1}{a}\,ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}\;-\;a}{x}\right) + C$$

3 Questão c

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int sen^5\, x\ dx \qquad (c1)$$

Solução:
Sabendo que $sen^2 x = 1 - cos^2\, x$, podemos escrever

$$I = \int sen\, x\ sen^2\, x\ sen^2\, x\ dx = \int sen\, x (1 - cos^2\, x)\ (1 - cos^2\, x)\ dx$$

Desenvolvendo, encontramos

$$I = \int sen\, x (1 - 2\, cos^2\, x\ +\ cos^4\, x)\ dx$$

$$I = \int sen\, x\ dx\ -\ 2 \int sen\, x\ cos^2\, x\ dx + \int sen\, x\ cos^4\, x\ dx$$

Vamos desenvolver cada integral separadamente. A primeira, o resultado é trivial, ou

$$I_1 = \int sen\, x\ dx\ =\ - cos\, x\ + C_1$$

Para a segunda integral façamos

$$u = cos\, x \quad \Rightarrow \quad du = - sen\, x\, dx \qquad (c2)$$

Dessa forma, substituindo temos

$$I_2 = 2 \int u^2\ du = \frac{2}{3}\ u^3\ +\ C_2\ =\ \frac{2}{3} cos^3 x\ +\ C_2$$

Para a terceira integral, continuamos usando a relação (c2). Dessa forma

$$I_3 = - \int u^4\ du = -\frac{1}{5}\ u^5\ +\ C_3\ =\ -\frac{1}{5} cos^5 x\ +\ C_3$$

Agora, somando algebricamente os valores encontrados e fazendo $C = C_1\ +\ C_2\ +\ C_3$, obtemos

$$I = -\,cos\,x + \frac{2}{3}\,cos^3 x\; + \;\frac{1}{5}\,cos^5 x\; + \;C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

4 Questão d

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int sec^3\,x\;tg\,x\;dx \qquad (d1)$$

Solução:
Lembrando que $sec\,x = 1/cos\,x$ e que $tg\,x = sen\,x/cos\,x$, temos

$$I = \int sec^3\,x\;tg\,x\;dx \;=\; \int \frac{1}{cos^3\,x}\;\frac{sen\,x}{cos\,x}\;dx = \int \frac{sen\,x}{cos^4\,x}\;dx$$

Vamos fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$u = cos\,x \quad \Rightarrow \quad du = -\,sen\,x\;dx \qquad (d2)$$

$$I = -\int \frac{du}{u^4} = -\int u^{-4}\;du \;=\; -\frac{u^{-4+1}}{-4+1} + C \;=\; \frac{u^{-3}}{3} + C$$

Retornando a relação (d2), obtemos

$$I = \int sec^3\,x\;tg\,x\;dx \;=\; \frac{1}{3\;cos^3\,x} \;+\; C \;=\; \frac{sec^3\,x}{3} + C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

5 Questão e

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int sen^4\, x\; cos^2\, x\; dx \tag{1e}$$

Solução:

Para resolver esta questão vamos usar as duas relações trigonométricas mostradas abaixo:

$$cos^2\, x = \frac{1\, +\, cos(2\,x)}{2} \quad \text{e} \quad sen^2\, x = \frac{1\, -\, cos(2\,x)}{2}$$

Assim, podemos fazer a seguinte substituição

$$sen^4\, x\; cos^2\, x\; = \left(\frac{1\, -\, cos(2\,x)}{2}\right)^2 \left(\frac{1\, +\, cos(2\,x)}{2}\right)$$

Desenvolvendo

$$sen^4\, x\; cos^2\, x\; = \left(\frac{1}{4} - \frac{cos(2\,x)}{2}\; + \frac{cos^2\,(2\,x)}{4}\right)^2 \left(\frac{1\, +\, cos(2\,x)}{2}\right)$$

Com isso obtemos

$$sen^4\, x\; cos^2\, x\; = \frac{1}{8}(1\, +\, cos\,(2\,x)\; -\; cos^2\,(2\,x)\; +\; cos^3\,(2\,x))$$

Fazendo $u\; =\; 2\,x$, então $dx\; =\; du/2$. Assim, para a integração temos

$$I = \frac{1}{16}\int (1\; -\; cos\, u\; -\; cos^2\, u\; +\; cos^3\, u)\, du$$

A integral de $-\,cos\, u\;=\;-sen\, u$. A integral de $-\,cos^2\, u\;=\;-sen\,(2\,u)/4\;-\;(1/2)\,u$, valor este demonstrado em Anexo I, no final da prova. E a integral de $cos^3\, u = \;sen\, u\; -\; sen^3\, u/3$, valor este demonstrado em Anexo II, no final da prova. Então, obtemos:

$$I = \frac{1}{16}\left(u - sen\, u - \frac{sen\,(2\,u)}{4}\; - \frac{1}{2}\,u + sen\, u\; - \;\frac{sen^3\, u}{3}\right)\; +\; C'$$

Reorganizando os termos e fazendo as simplificações encontramos:

$$I = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,u - \frac{sen\,(2\,u)}{4} - \frac{sen^3\,u}{3}\right) + C'$$

Porém, sabemos que $u = 2\,x$. Então a expressão final é:

$$I = \frac{x}{16} - \frac{sen\,(4\,x)}{64} - \frac{sen^3\,(2\,x)}{48} + C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

6 Questão f

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int cos\,(\alpha\,x)\;cos\,(\beta\,x)\;dx \tag{1f}$$

Solução:

Da trigonometria temos a seguinte relação:

$$cos\,A\;cos\,B = \frac{1}{2}[cos\,(A-B)\;+\;cos\,(A+B)]$$

Adaptando para o nosso caso, temos que:

$$I = \frac{1}{2}\int cos\,(\alpha\;-\;\beta)\,x\;dx\;+\;\frac{1}{2}\int cos\,(\alpha\;+\;\beta)\,x\;dx$$

Como as duas integrais são triviais, temos o seguinte resultado:

$$I = \frac{sen\,(\alpha\;-\;\beta)\,x}{2\,(\alpha\;-\;\beta)} + \frac{sen\,(\alpha\;+\;\beta)\,x}{2\,(\alpha\;+\;\beta)} + C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

7 Questão g

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int \sqrt{2 - x^2}\, dx \tag{1}$$

Solução:
Façamos a seguinte transformação de variáveis:

$$x = \sqrt{2}\; sen\, t \quad \Rightarrow \quad dx = \sqrt{2}\; cos\, t\; dt \tag{2}$$

Então, podemos escrever

$$I = \int \sqrt{2 \,-\, 2\, sen^2\, t}\, \sqrt{2}\; cos\, t\, dt = \int \; 2\sqrt{1 \,-\, sen^2\, t}\; cos\, t\, dt$$

Mas $\sqrt{1 \,-\, sen^2\, t} = cos\, t$, portanto

$$I = 2 \int \, cos^2\, t\, dt \tag{3}$$

Por outro lado, conhecemos a seguinte relação trigonométrica

$$cos^2\, t = \frac{1}{2} + \frac{cos\, 2\, t}{2}$$

Substituindo em (3) e efetuando o cálculo, encontramos

$$I = \int (1 + cos\, 2\, t)dt \; = \int \, dt \, + \int \, cos\, 2\, t\, dt$$

Assim, obtemos

$$I = t \, + \frac{sen\, 2\, t}{2} + C$$

Baseado na relação (2), temos

$$t \; = \, arcsen\, \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \text{e também sabemos que} \quad sen\, 2\, t \; = \; 2\, sen\, t\; cos\, t$$

sabendo que $cos\, t = \sqrt{1 - sen^2\, t} = \sqrt{1 - x^2/2}$, obtemos

$$I = t + sen\, t\; cos\, t \, + \, C = \; arcsen\, \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x\,\sqrt{2 - x^2}}{2} \, + \, C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

8 Questão h

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int arctg\, x\; dx \qquad (h1)$$

Solução:
Vamos aplicar integração por partes, fazendo:

$$u = arctg\, x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

Então:

$$I = u\,v - \int v\,du \;=\; x\,arctg\, x - \int \frac{x}{1\,+\,x^2}\,dx$$

Para resolver esta integral, vamos usar uma variável de substituição. Assim:

$$t = 1\,+\,x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2\,x\;dx$$

Então ficamos com a seguinte relação:

$$I = \; x\,arctg\, x \;-\; \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \;=\; x\,arctg\, x \;-\; \frac{1}{2}\,ln\,|t| \;+\; C$$

Retornando à variável x, obtemos

$$I = \int arctg\, x\; dx \;=\; x\,arctg\, x - \frac{1}{2}\,ln\,(1+x^2) \;+\; C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

9 Questão i

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx \qquad (i1)$$

Solução:

Vamos fazer a seguinte substituição de variável:

$$x = sec^2 u \quad \Rightarrow \quad dx = tg\, u\, sec^2\, u\; du \quad \text{e} \quad \sqrt{x\,-\,1} \,=\, \sqrt{sec^2\, u - 1} = tg\, u$$

Substituindo em $(i1)$ obtemos

$$I = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx \;=\; \int \frac{tg\, u\; tg\, u\; sec^2\, u}{sec^2\, u}\, du \;=\; \int tg^2\, u\; du$$

Assim, temos

$$\int tg^2\, u\; du = \int (sec^2 - 1)\; du = tg\, u - u + C'$$

Usando as relações da substituição de variáveis e retornando à variável x, encontramos

$$\sqrt{x\,-\,1} \,=\, \sqrt{sec^2\, u - 1} = tg\, u \quad \text{e} \quad u = arctg\, \sqrt{x\,-\,1}$$

Assim, podemos escrever a solução final, ou

$$I = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx \;=\; \sqrt{x\,-\,1} \,-\, arctg\,(\sqrt{x\,-\,1}) \,+\, C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

10 Questão j

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^{3/4}+1}\,dx \tag{j1}$$

Solução:

Vamos reescrever a integral passando $\sqrt{x}$ para o denominador. Assim, obtemos:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^{3/4}+1}\,dx = \int \frac{1}{x^{1/4}+x^{-1/2}}\,dx \tag{j2}$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$t = x^{1/4} \qquad x = t^4 \quad \text{logo} \quad dx = 4\,t^3\,dt \tag{j3}$$

Substituindo (j3) em (j2), obtemos

$$I = \int \frac{1}{t+t^{-2}}\,4\,t^3\,dt \; = \; \int \frac{4\,t^5\,dt}{t^3+1}$$

Vamos fazer mais uma mudança de variável, ou

$$u = t^3+1 \quad \Rightarrow \quad du = 3\,t^2\,dt \quad \text{obtendo} \quad t = (u-1)^{1/3} \tag{j4}$$

Dessa mudança de variável vamos obter o valor de dt, ou

$$dt = \frac{du}{3\,(u-1)^{2/3}}$$

Reescrevendo a integral temos

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{(u-1)^{5/3}}{u}\,\frac{du}{(u-1)^{2/3}} = \frac{4}{3}\int \frac{u-1}{u}\,du = \frac{4}{3}\int u^{-1}\,(u{-}1)\,du$$

Podemos escrever

$$I = \frac{4}{3}\int du \,-\, \frac{4}{3}\int u^{-1}\,du \,=\, \frac{4}{3}(u \,-\, ln|u|)$$

Conforme a relação (j4), temos que $u = t^3+1$, então podemos escrever

$$I = \frac{4}{3}\left[(t^3+1) \; - \; ln|t^3+1|\right]$$

Mas pela relação (j3), temos que $t = x^{1/4}$, retornando à variável x. Logo

$$I = \frac{4}{3}\left[(x^{3/4}+1) \; - \; ln|x^{3/4}+1|\right] + C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

11 Anexo I

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int cos^2(u)du \; = \int \frac{cos(2\,u)}{2}\,du \; + \; \frac{1}{2}\int du \qquad (A1)$$

Solução:

Acima, usamos a relação trigonométrica

$$cos^2\,(u) = \frac{cos\,(2\,u)}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{e fazendo} \quad t = 2\,u \; \Rightarrow \; du = \frac{dt}{2}$$

Obtemos

$$I = \int \frac{cos(t)}{2}\,dt \; + \; \frac{1}{4}\int dt \; = \; \frac{sen\,t}{4} \; + \; \frac{t}{4} \; + \; C'$$

Substituindo $t = 2\,u$

$$I = \int cos^2(u)\,du = \frac{sen\,(2\,u)}{4} + \frac{1}{2}\;u \; + \; C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.

12 Anexo II

Calcule a integral abaixo:

$$I = \int cos^3(u)du \tag{A2}$$

Solução:

Lembrando a relação trigonométrica $cos^2x = 1 - sen^2x$, podemos escrever

$$I = \int cos^3(u)du = \int (1 - sen^2\, u)\, cos\, u\ du$$

$$I = \int cos^3(u)du = \int cos\, u\ du - \int sen^2\, u\ cos\, u\ du$$

A solução da primeira integral é trivial, ou

$$I_1 = \int cos\, u\ du = sen\, u + \ C_1$$

Na segunda integral fazemos $t = sen\, u$ então $dt = cos\, u\ du$. Logo:

$$I_2 = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C_2 = \frac{sen^3\, u}{3} + C_2$$

Logo, realizando a soma $I = I_1 + I_2$ e obedecendo os sinais, além de fazer $C = C_1 + C_2$, encontramos:

$$I = \int cos^3(u)du = sen\, u - \frac{sen^3}{3} + C$$

onde $C \in \Re$ é a constante de integração.