Derivada de função de x elevada a função de x

29/09/2021

by Prof. Claudir Barbieri

Vamos considerar o caso de uma função $f(x)$ sendo igual a uma outra função de x, que denominaremos de $g(x)$, sendo elevada a outra função de x, denominada de $h(x)$. Vamos considerar que essas funções sejam bem comportadas matematicamente, ou seja, são contínuas e deriváveis em todo o domínio real. Assim, podemos escrever:

$$f(x) \; = \; g(x)^{h(x)}$$

Agora, é necessário retirar essa função $h(x)$ do expoente de $g(x)$. Nada melhor do que aplicar a função logarítmo natural, ou seja:

$$ln[f(x)] \; = \; ln[g(x)^{h(x)}]$$

E, aplicando a propriedade dos logarítmos, podemos escrever:

$$\ln[f(x)] \; = \; h(x)\,[\ln g(x)]$$

A partir desta igualdade vamos calcular a derivada dessa função, que representaremos por:

$$[\ln f(x)]' \;=\; [h(x)\;\ln g(x)]'$$

Note que, no primeiro membro temos a derivada do logarítmo natural e, no segundo membro a derivada de um produto de funções, a qual devemos aplicar a regra do produto. Desta forma, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \;=\; h'(x)\;\ln g(x) \;+\; h(x)\,\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Finalmente chegamos a equação final que define a derivada de uma função de x elevada a outra função de x. Então:

$$f'(x) \;=\; f(x)\;\left[h'(x)\;\ln g(x) \;+\; h(x)\,\frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

Para exemplificar a utilização desta fórmula, vamos derivar a função abaixo:

$$f(x) \;=\; [sen\,(x)]^{(x^2+2\,x)}$$

Façamos $g(x) \;=\; sen\,(x)$, logo $g'(x) = cos\,(x)$ e, $h(x) \;=\; (x^2 + 2\,x)$ cuja derivada é $h'(x) \;=\; 2\,x + 2$. Então, substituindo em nossa fórmula, encontramos:

$$f'(x) \;=\; [sen\,(x)]^{(x^2+2\,x)}\left[(2\,x+2)\,(\ln sen\,(x)) \;+\; (x^2+2\,x)\,\frac{cos\,(x)}{sen\,(x)}\right]$$

Que podemos escrever como:

$$f'(x) \;=\; [sen\,(x)]^{(x^2+2\,x)}\left[(2\,x+2)\,(\ln sen\,(x)) \;+\; (x^2+2\,x)\,cotg\,(x)\right]$$

Portanto, algo que pode parecer muito complicado de se fazer, torna-se bastante simples com a aplicação desta fórmula.