

Mais de 40 problemas resolvidos
passo a passo para estudar e aprender
circuitos

Associação

de

Resistores

Eng. Claudir Barbieri

www.eletricatotal.com

Barbieri, Claudir

Associação de Resistores – ebook em pdf - 2023

Site correlacionado www.eletricatotal.com

1. Engenharia Elétrica – Circuitos – Associação de Resistores
- I. Barbieri, Claudir – II. Circuitos elétricos

@2023

Todos os direitos autorais reservados a CLAUDIR DIAS BARBIERI. A reprodução de todo ou partes deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr. cbeletrica2016@gmail.com - Porto Alegre

Prefácio

Este ebook gratuito em pdf tem a finalidade de mostrar um trabalho que foi desenvolvido com o objetivo de disponibilizar exemplares no aludido formato tratando objetivamente de problemas sugeridos sobre vários temas com suas respectivas soluções. Este exemplar gratuito é uma amostra do conteúdo do ebook que trata das associações de resistores.

Para adquirir o ebook entre no site www.eletricatotal.com e será direcionado para a respectiva página onde através de uma doação obterás acesso ao ebook.

Estamos com o lançamento do primeiro volume que trata das associações de resistores, composto por mais de 40 problemas solucionados abordando diferentes combinações possíveis de resistores, inclusive com os famosos circuitos delta e estrela, que muitos estudantes possuem certa dificuldade em seu entendimento. A solução se caracteriza por ser bem detalhada, sendo realizada passo a passo, acompanhada de uma explicação objetiva de como resolver o problema.

A experiência do autor na área pedagógica reconhece que muitos professores aceleram a exposição da teoria de circuitos e praticamente resolvem os problemas mais simples possíveis. Porém, nas provas o nível de dificuldade aumenta e o estudante não tem apoio literário para solucionar os problemas. Esse é o propósito deste ebook, apresentando inicialmente problemas fáceis para o estudante ir solidificando seus conhecimentos e, gradativamente, o nível de dificuldade aumenta, trazendo uma experiência única para os estudantes que querem dominar a área de circuitos elétricos.

A teoria apresentada no início do livro foi apresentada de forma condensada, pois é a parte que mais interessa na solução dos problemas, já que estamos interessados na parte prática, mostrando claramente onde devemos aplicar a teoria. Cabe salientar que a linguagem utilizada é a mais simples e acessível, a fim de contemplar alunos, ou mesmo curiosos da área, até profissionais que desejam relembrar conceitos já esquecidos.

O livro atende o ensino Médio, Técnico e Superior. O autor espera atender as expectativas do leitor. Qualquer crítica, elogios, sugestões, comentários, podem ser encaminhados via email cbeletrica2016@gmail.com

O autor agradece.

Sobre Associação de Resistores

Vamos fazer uma breve descrição de como encontrar a resistência equivalente de uma associação série ou paralela.

Associação Série

No caso da associação série encontramos o valor da resistência equivalente do circuito simplesmente somando todos os valores dos resistores que compõem o circuito. Assim, para um número qualquer (n) de resistores no circuito, podemos escrever:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (1.1)$$

Associação Paralelo

Para o caso de resistores em paralelo usamos a equação abaixo para um número qualquer (n) de resistores.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.2)$$

No caso de existir somente dois resistores (R_1 e R_2) no circuito podemos simplificar a equação (1.2) da seguinte maneira:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.3)$$

Redes Delta e Estrela

Existem situações em análise de circuitos de não termos condições de achar a solução em virtude de não encontrarmos resistores em série nem em paralelo. Neste caso devemos simplificar o circuito através de redes equivalentes de três terminais. Aqui vamos introduzir o conceito de duas redes bastante difundidas em análise de circuitos. Sejam elas, **rede Delta** e **rede Estrela**. Nosso interesse é identificar qual tipo de rede temos no circuito. Se identificarmos que é uma rede Delta devemos transformá-la em uma rede Estrela. E se for uma rede Estrela devemos transformá-la em uma rede Delta. Essas transformações têm como objetivo reduzir o circuito de tal forma que só tenhamos associação de resistores série e/ou paralelo. Então, o problema é resolvido da forma tradicional encontrando a resistência equivalente do circuito através da solução de resistores em série e/ou paralelo.

Apresentação das Redes Delta e Estrela

Inicialmente vamos introduzir a rede Delta, onde na Figura 1 podemos ver sua configuração. A rede Delta também é conhecida pelos nomes de **rede Pi** ou **rede Triângulo**. A Figura 2 mostra a configuração da rede Pi. Observe que são os mesmos circuitos apenas com uma topologia diferente.

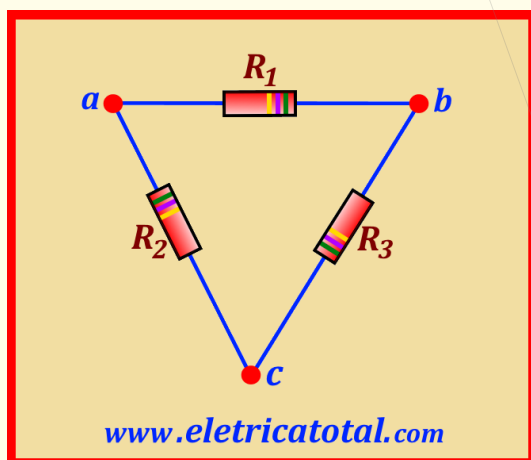


Figura 1

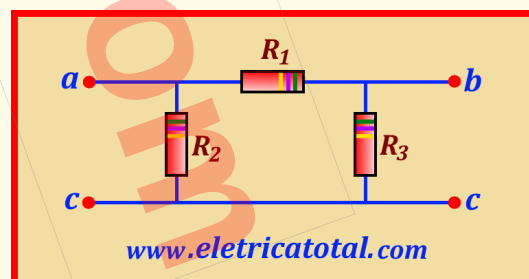


Figura 2

Agora vamos apresentar a configuração da rede Estrela onde na Figura 3 podemos ver sua configuração. A rede Estrela também é conhecida pelos nomes de **rede T** ou **rede Y**. Essas redes são apresentadas na Figura 4.

Observe que neste caso também temos exatamente os mesmos circuitos apenas diferindo pela topologia.

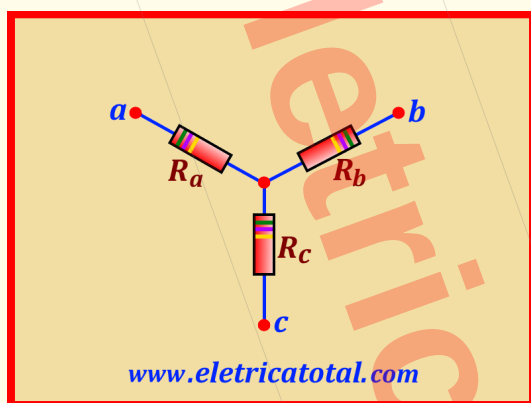


Figura 3

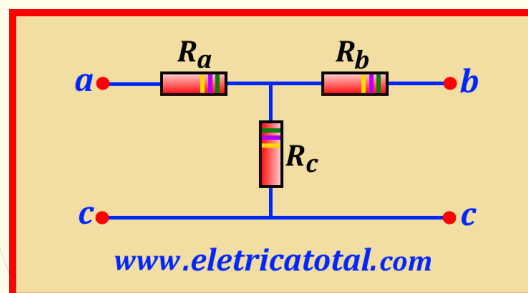


Figura 4

Para solidificar seus conhecimentos a partir do Problema 30 disponibilizamos vários problemas com o intuito de mostrar essas técnicas de transformações em sua resolução.

Problemas sobre Associação de Resistores

Problema 1.3

Encontre a resistência equivalente entre os pontos a-b no circuito mostrado na Figura 1.3.

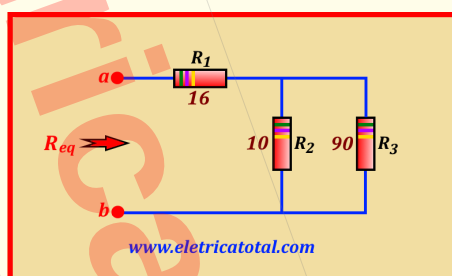


Figura 1.3

Solução:

Nota-se que no circuito apresentado na Figura 1.3, há dois resistores conectados em paralelo e este paralelo está conectado em série com R_1 . Desta forma, vamos resolver o paralelo de R_2 e R_3 e nomeá-lo por R_p , conforme indicado por uma elipse verde na Figura 1.3.1.

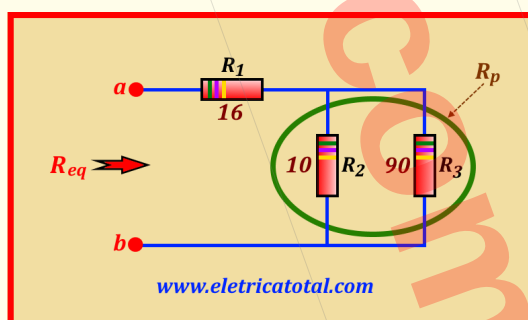


Figura 1.3.1

A equação que determina o valor do paralelo, é dada por

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \Rightarrow \quad R_p = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

Substituindo pelos valores numéricos, obtemos

$$R_p = \frac{10 \cdot 90}{10 + 90} = 9 \, \Omega$$

Após esse cálculo, podemos reduzir o circuito conforme mostra a **Figura 1.3.2**

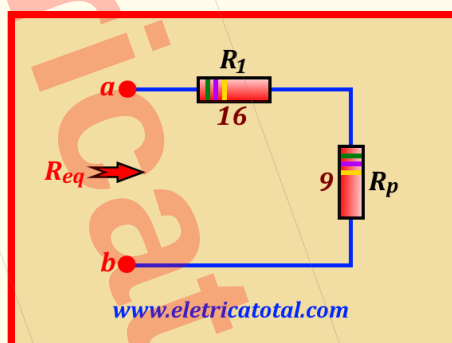


Figura 1.3.2

Portanto, reduzimos o circuito em dois resistores conectados em série e já sabemos calcular a resistência equivalente desse circuito, ou

$$R_{eq} = R_1 + R_p = 16 + 9 = 25 \, \Omega$$

Problema 1.13

Encontre a resistência equivalente entre os pontos **a-b** no circuito mostrado na **Figura 1.13**.

Solução:

Primeiramente vamos analisar o circuito entre os pontos **c-d**. Note que os resistores R_3 e R_5 , bem como R_4 e R_6 , estão na configuração série. Para

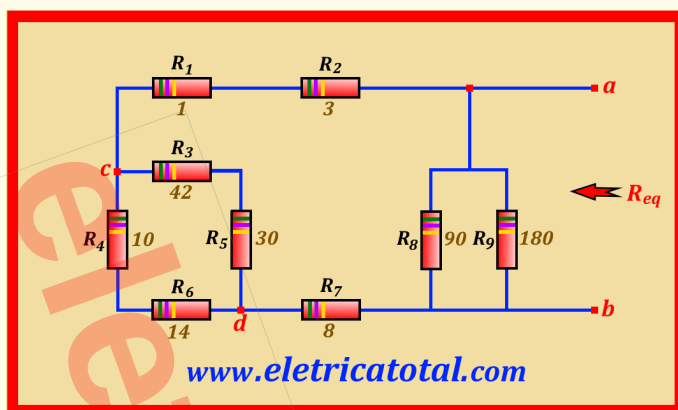


Figura 1.13

encontrar a resistência equivalente de cada conjunto, basta somar seus valores. Então

$$R_{35} = R_3 + R_5 = 42 + 30 = 72 \, \Omega \quad \text{e} \quad R_{46} = R_4 + R_6 = 10 + 14 = 24 \, \Omega$$

E esses dois conjuntos estão em paralelo. Assim, a resistência equivalente entre os pontos c-d é igual a:

$$R_{cd} = \frac{R_{35} \cdot R_{46}}{R_{35} + R_{46}} = \frac{72 \cdot 24}{72 + 24} = 18 \, \Omega$$

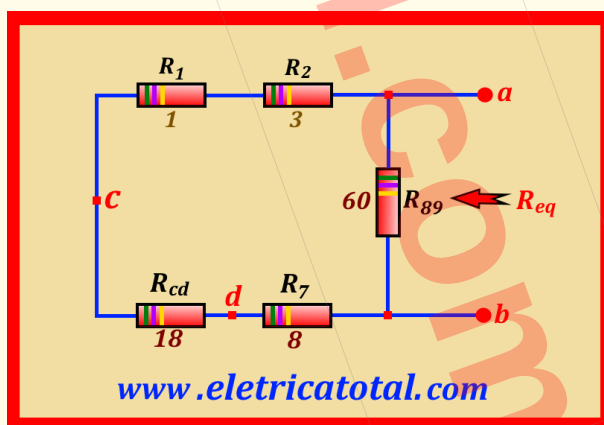


Figura 1.13.1

Logo, podemos substituir o circuito entre os pontos c-d por um único re-

sistor de valor igual a $R_{cd} = 18 \Omega$. Na **Figura 1.13.1** mostramos o circuito simplificado. Agora, analisando o circuito verificamos que é possível calcular a resistência equivalente do circuito entre os pontos **a-b** através do caminho **a-c-d-b**, pois todos os resistores se encontram em série. Então:

$$R_{acdb} = R_2 + R_1 + R_{cd} + R_7 = 3 + 1 + 18 + 8 = 30 \Omega$$

Note que temos mais um conjunto de resistores entre os pontos **a-b**, via o paralelo dos resistores R_8 e R_9 . Calculando esse paralelo, obtemos

$$R_{89} = \frac{R_8 \cdot R_9}{R_8 + R_9} = \frac{90 \cdot 180}{90 + 180} = 60 \Omega$$

E por fim, ficamos com o paralelo de R_{acdb} e R_{89} , cujo valor é exatamente a resistência equivalente entre os pontos **a-b**. Portanto

$$R_{eq} = \frac{R_{acdb} \cdot R_{89}}{R_{acdb} + R_{89}} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 20 \Omega$$

Problema 1.16

Encontre a resistência equivalente entre os pontos **a-b** no circuito mostrado na **Figura 1.16**.

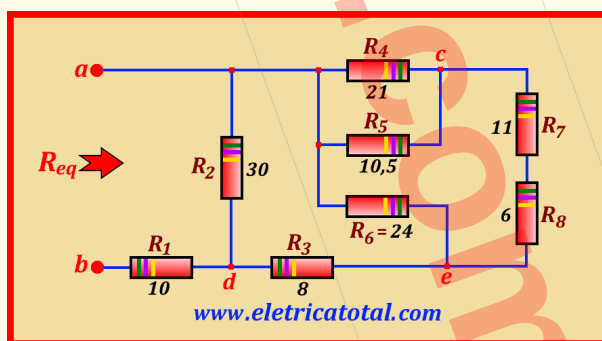


Figura 1.16

Solução:

Do circuito mostrado na **Figura 1.16**, vemos que entre os pontos **a-c** temos dois resistores (R_4 e R_5) em paralelo. Calculando esse paralelo vamos obter:

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{21 \cdot 10,5}{21 + 10,5} = 7 \, \Omega$$

Entre os pontos **c-e** temos dois resistores em série, R_7 e R_8 . Logo:

$$R_{78} = R_7 + R_8 = 11 + 6 = 17 \, \Omega$$

Então, para encontrarmos o valor da resistência equivalente entre os pontos **a-e** via caminho **a-c-e**, que vamos denominar de R_{ace} , devemos somar os valores encontrados acima. Então:

$$R_{ace} = R_{45} + R_{78} = 7 + 17 = 24 \, \Omega$$

Agora devemos estar atentos ao fato que a resistência equivalente R_{ace} está em paralelo com R_6 . Então, calculando esse paralelo vamos encontrar a resistência equivalente entre os pontos **a-e**, ou seja:

$$R_{ae} = \frac{R_{ace} \cdot R_6}{R_{ace} + R_6} = \frac{24 \cdot 24}{24 + 24} = 12 \, \Omega$$

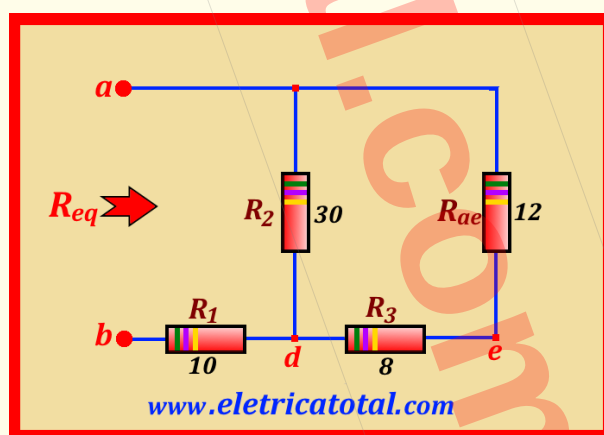


Figura 1.16.1

E, pelo circuito simplificado mostrado na **Figura 1.16.1**, verificamos que todo esse conjunto de resistores, representados pelo valor de R_{ae} , está em

série com R_3 . Então, calculando essa série determinamos o valor da resistência equivalente entre os pontos **a-d**, via caminho **a-e-d**, ou seja:

$$R_{aed} = R_{ae} + R_3 = 12 + 8 = 20 \, \Omega$$

E, facilmente constatamos que R_{aed} está em paralelo com R_2 . Dessa forma, encontrando o valor desse paralelo estamos calculando o valor da resistência equivalente entre os pontos **a-d**, ou seja:

$$R_{ad} = \frac{R_{aed} \cdot R_2}{R_{aed} + R_2} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \, \Omega$$

E, finalmente, somando esse valor com o valor de R_1 , pois R_{ad} está em série com R_1 , encontramos o valor da resistência equivalente entre os pontos **a-b**, conforme enunciado do problema. Então:

$$R_{eq} = R_{ad} + R_1 = 12 + 10 = 22 \, \Omega$$

Problema 1.23

Um circuito é constituído por infinitos resistores conectados conforme mostra a **Figura 1.23**. O valor de cada resistor é igual a R . Encontre a resistência equivalente entre os pontos **a-b**.

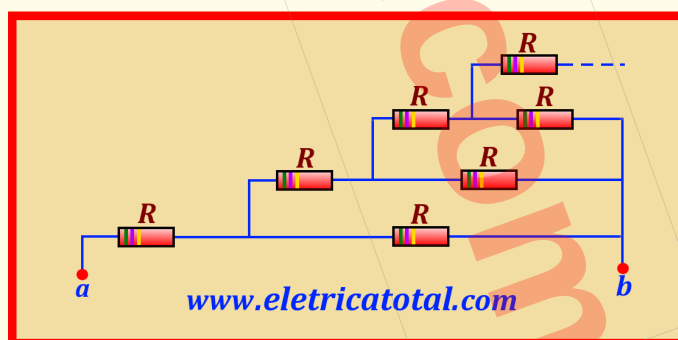


Figura 1.23

Solução:

Para resolver este problema é fundamental entender que quando temos um número infinito de elementos, caso seja adicionado ou subtraído mais alguns elementos, o número total de elementos continua sendo infinito. Tendo isso em mente, podemos redesenhar o circuito com uma nova topologia para maior entendimento.

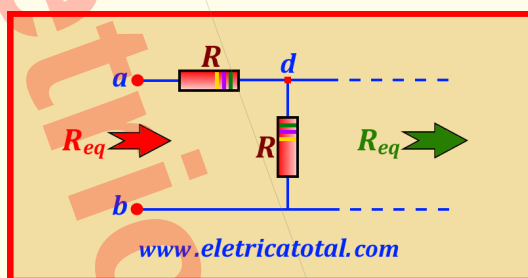


Figura 1.23.1

Percebemos pela Figura 1.23.1 que retiramos dois resistores do circuito. Todo o circuito à direita da figura continua a ter o mesmo valor de resistência equivalente (R_{eq}) que vista pelo lado esquerdo do circuito. Então, olhando pela direita do circuito percebemos que R_{eq} está conectada em paralelo com R . Dessa forma, resolvendo esse paralelo e denominando-o por R_{db} , obtemos:

$$R_{db} = \frac{R \cdot R_{eq}}{R + R_{eq}}$$

E, evidentemente, que R_{db} está conectado em série com R . E essa série representa a resistência equivalente vista através dos pontos a-b. Logo, resolvendo essa série, encontramos:

$$R_{eq} = R + \frac{R \cdot R_{eq}}{R + R_{eq}} = \frac{R(R + R_{eq}) + R \cdot R_{eq}}{R + R_{eq}}$$

No desenvolvimento da equação acima, calculamos o MMC da fração e realizamos as respectivas operações. Vamos continuar desenvolvendo ao efetuar a multiplicação no numerador e passando o denominador para o primeiro membro. Logo:

$$R_{eq}(R + R_{eq}) = R^2 + R \cdot R_{eq} + R \cdot R_{eq}$$

Continuando com o desenvolvimento, temos:

$$R_{eq} \cdot R + R_{eq}^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot R_{eq}$$

Finalmente obtemos uma equação do segundo grau, conforme abaixo:

$$R_{eq}^2 - R \cdot R_{eq} - R^2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos as soluções abaixo.

$$R_{eq} = \frac{R}{2} (1 + \sqrt{5}) \quad \star \quad R_{eq} = \frac{R}{2} (1 - \sqrt{5})$$

Devemos observar que $\sqrt{5}$ é maior que 1 ($\sqrt{5} = 2,23 > 1$). Portanto, devemos desconsiderar a solução do lado direito, pois seria um resistor com valor negativo e, na prática, não existe resistores com valores negativo. Então a resposta correta é:

$$R_{eq} = \frac{R}{2} (1 + \sqrt{5}) \, \Omega$$

Problemas envolvendo Transformações

Delta-Estrela e Estrela-Delta

Problema 1.30

Encontre a resistência equivalente entre os pontos a-b no circuito mostrado na Figura 1.30.

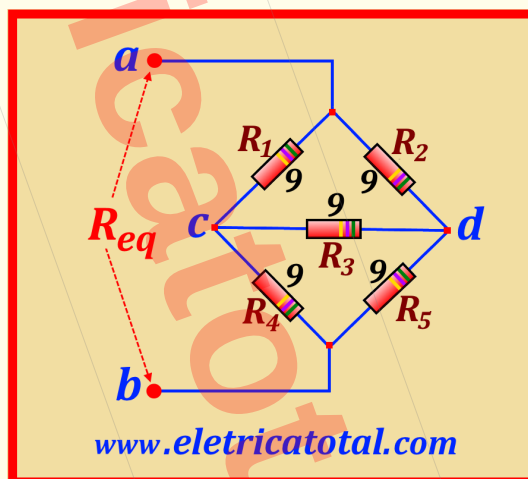


Figura 1.30

Solução:

Este é o primeiro circuito de uma série que vamos apresentar e resolver tratando sobre transformações Delta-Estrela e Estrela-Delta. Devemos perceber que este circuito não pode ser resolvido usando associação série e/ou paralelo. Então vamos estudar uma maneira de resolvê-lo. Intencionalmente, os valores de todos os resistores que compõem o circuito foram escolhidos com o mesmo valor. Observe que este circuito apresenta dois circuitos Delta, dependendo do ponto de vista. Assim, identificamos um circuito Delta formado pelos resistores que estão entre os pontos a-c-d. Mas, também é possível constatar um circuito Delta entre os pontos b-c-d. Para resolver o circuito basta escolher um circuito Delta e transformá-lo em um circuito Estrela.

Para deixar bem claro que podemos resolver o circuito escolhendo qualquer um dos circuitos Delta faremos as duas soluções.

Solução 1:

Para esta solução vamos escolher o circuito Delta que está entre os pontos **a-c-d**. Desta forma, recorrendo a equação (1.4) apresentada na parte teórica, vamos calcular os valores dos resistores que vão compor o circuito Estrela. Repetindo a equação (1.4), e considerando $R_{\Delta} = R_1 = R_2 = R_3$, temos:

$$R_Y = R_{\Delta}/3 = \frac{9}{3} = 3 \, \Omega$$

Com esta transformação o circuito fica conforme mostra a **Figura 1.30.1**.

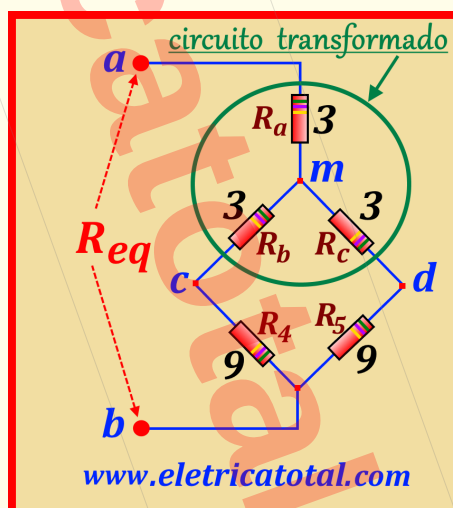


Figura 1.30.1

A **Figura 1.30.1** detalha a substituição do circuito Delta pelo circuito Estrela. Agora observamos que os resistores R_b e R_4 estão conectados na configuração série, bem como os resistores R_c e R_5 . Logo é possível encontrar o resistor resultante dessas séries. Vamos denominar a série de R_b e R_4 por R_{b4} e a série R_c e R_5 por R_{c5} . Calculando, temos:

$$R_{b4} = R_b + R_4 = 3 + 9 = 12 \, \Omega$$

$$R_{c5} = R_c + R_5 = 3 + 9 = 12 \, \Omega$$

Devemos prestar atenção ao fato que estes resistores resultantes calculados acima estão conectados na configuração paralelo. Então, devemos encontrar o valor desse paralelo e, denominando-o por R_{mb} , temos:

$$R_{mb} = \frac{R_{b4} \cdot R_{c5}}{R_{b4} + R_{c5}} = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = \frac{144}{24} = 6 \, \Omega$$

Como os valores dos resistores eram iguais, obviamente que o valor resultante deve ser a metade do valor de um deles. Apenas desenvolvemos com a equação (1.3) por questões didáticas.

E, finalmente obtemos um circuito com dois resistores conectados na configuração série, cuja solução é extremamente simples de resolver, pois basta aplicar a equação (1.1), ou seja:

$$R_{eq} = R_a + R_{mb} = 3 + 6 = 9 \, \Omega$$

Observe que o valor da resistência equivalente do circuito tem o valor exatamente igual a de um único resistor que compõe o circuito. Essa é uma característica desse circuito quando todos os resistores do circuito possuem o mesmo valor ôhmico. Se os valores dos resistores fossem $50 \, \Omega$, então após os cálculos o resultado seria $R_{eq} = 50 \, \Omega$. Se fossem $127 \, \Omega$, o resultado seria $R_{eq} = 127 \, \Omega$. Isto significa que este circuito sempre pode ser substituído por um único resistor de valor igual a um dos resistores do circuito.

Solução 2:

Para esta solução vamos escolher o circuito Delta que está entre os pontos **b-c-d**. Como fizemos anteriormente, considerando $R_{\Delta} = R_3 = R_4 = R_5$ e usando a equação (1.4), obtemos:

$$R_Y = R_{\Delta}/3 = \frac{9}{3} = 3 \, \Omega$$

Com esta transformação o circuito fica conforme mostra a **Figura 1.30.2**.

A **Figura 1.30.2** detalha a substituição do circuito Delta pelo circuito Estrela. Agora observamos que os resistores R_1 e R_a estão conectados na con-

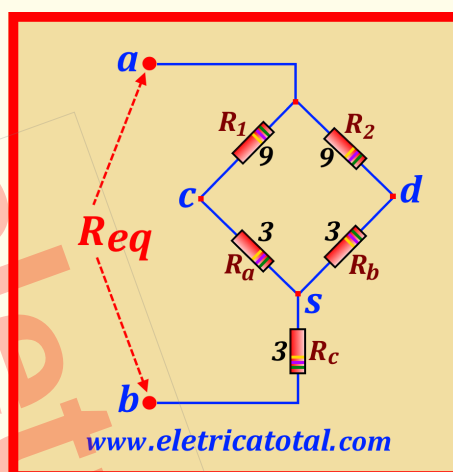


Figura 1.30.2

figuração série, bem como os resistores R_2 e R_b . Logo é possível encontrar o resistor resultante dessas séries. Vamos denominar a série de R_1 e R_a por R_{1a} e a série R_2 e R_b por R_{2b} . Calculando, temos:

$$R_{1a} = R_1 + R_a = 9 + 3 = 12 \, \Omega$$

$$R_{2b} = R_2 + R_b = 9 + 3 = 12 \, \Omega$$

Como dito anteriormente, os resistores resultantes calculados acima estão conectados na configuração paralelo. Então, devemos encontrar o valor desse paralelo e, denominando-o por R_{as} , temos:

$$R_{as} = \frac{R_{1a} \cdot R_{2b}}{R_{1a} + R_{2b}} = \frac{12 \cdot 12}{12 + 12} = \frac{144}{24} = 6 \, \Omega$$

E, mais uma vez, obtemos um circuito com dois resistores conectados na configuração série, cuja solução é aplicar a equação (1.1), ou seja:

$$R_{eq} = R_c + R_{as} = 3 + 6 = 9 \, \Omega$$

Portanto, fica claro que não importa qual circuito fazemos a transformação, o resultado será o mesmo.

Problema 1.36

Encontre a resistência equivalente entre os pontos a-b no circuito mostrado na Figura 1.36.

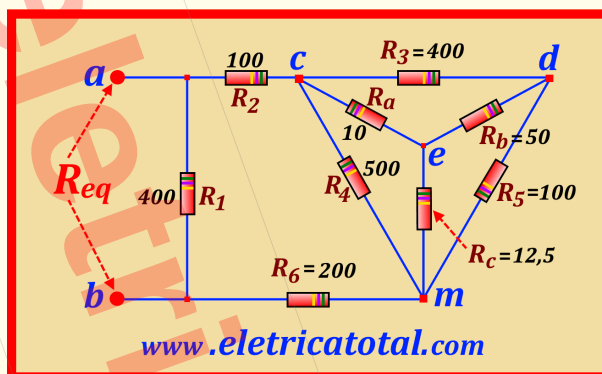


Figura 1.36

Solução:

O circuito mostrado na Figura 1.36 apresenta um circuito Delta e um circuito Estrela. Podemos fazer a transformação em qualquer um deles. Vamos optar por fazer a transformação no circuito Estrela usando as equações (1.9), (1.10) e (1.11). Vamos denominar os resistores do novo circuito Delta por R'_a , R'_b e R'_c . Na Figura 1.36.1 apresentamos o circuito com a transformação já incorporada.

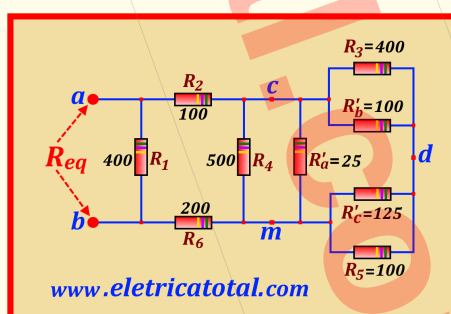


Figura 1.36.1

Vamos aos cálculos.

$$R'_a = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_b} = \frac{10 \cdot 50 + 10 \cdot 12,5 + 50 \cdot 12,5}{50} = \frac{1250}{50} = 25 \, \Omega$$

$$R'_b = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_c} = \frac{10 \cdot 50 + 10 \cdot 12,5 + 50 \cdot 12,5}{12,5} = \frac{1\,250}{12,5} = 100 \, \Omega$$

$$R'_c = \frac{R_a \cdot R_b + R_a \cdot R_c + R_b \cdot R_c}{R_a} = \frac{10 \cdot 50 + 10 \cdot 12,5 + 50 \cdot 12,5}{10} = \frac{1\,250}{10} = 125 \, \Omega$$

Observe que agora temos um circuito (Figura 1.36.1) que só apresenta resistores em paralelo e/ou série. Com isso podemos encontrar a solução usando os métodos tradicionais.

Assim, temos três circuitos paralelos para resolver. Começando pelo paralelo de R_4 e R'_a , denominando por R_{4a} , vamos obter:

$$R_{4a} = \frac{R_4 \cdot R'_a}{R_4 + R'_a} = \frac{500 \cdot 25}{500 + 25} = \frac{12\,500}{525} = 23,81 \, \Omega$$

O paralelo de R_3 e R'_b , denominando por R_{3b} , resulta:

$$R_{3b} = \frac{R_3 \cdot R'_b}{R_3 + R'_b} = \frac{400 \cdot 100}{400 + 100} = \frac{40\,000}{500} = 80 \, \Omega$$

E o paralelo de R_5 e R'_c , denominando por R_{5c} , resulta:

$$R_{5c} = \frac{R_5 \cdot R'_c}{R_5 + R'_c} = \frac{100 \cdot 125}{100 + 125} = \frac{12\,500}{225} = 55,56 \, \Omega$$

Com esses cálculos podemos simplificar o circuito conforme mostra a **Figura 1.36.2**.

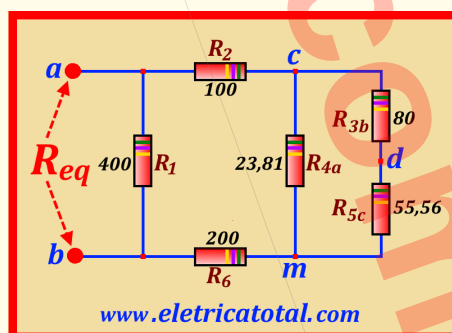


Figura 1.36.2

Note que via caminho **c-d-m** temos dois resistores em série, R_{3b} e R_{5c} . Por-

tanto, a série resultante que vamos denominar por R_{cdm} é:

$$R_{cdm} = R_{3b} + R_{5c} = 80 + 55,56 = 135,56 \, \Omega$$

E R_{cdm} encontra-se conectado em paralelo com R_{4a} . Logo, esse paralelo que vamos denominar por R_P é:

$$R_P = \frac{R_{cdm} \cdot R_{4a}}{R_{cdm} + R_{4a}} = \frac{135,56 \cdot 23,81}{135,56 + 23,81} = \frac{3\,227,68}{159,37} = 20,25 \, \Omega$$

E agora, facilmente constatamos que R_P está conectado em série com R_2 e R_6 . Logo, resolvendo essa série e denominando por R_S , obtemos:

$$R_S = R_2 + R_P + R_6 = 100 + 20,25 + 200 = 320,25 \, \Omega$$

Assim, para encontrar a resistência equivalente entre os pontos a-b basta calcular o paralelo entre R_1 e R_S . Então:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_S}{R_1 + R_S} = \frac{400 \cdot 320,25}{400 + 320,25} = \frac{128\,100}{720,25} = 177,85 \, \Omega$$